Kittel

(x). 2.1. Let $\vec{v} = h\vec{a}_1 + k\vec{a}_2 + l\vec{a}_3$.

$$\vec{G}\cdot\vec{v} = h^2 \vec{b}_1\cdot\vec{a}_2 + k^2 \vec{b}_2\cdot\vec{a}_2 + l^2 \vec{b}_3\cdot\vec{a}_3.$$

$$= (2\pi)\left[h^2+k^2+l^2\right], \quad \boxed{\vec{b}_i\cdot\vec{a}_j = 2\pi\delta_{ij}}$$

$$|\vec{G}|^2 = h^2\,\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1 + k^2\,\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2 + k^2\,\vec{b}_3\cdot\vec{b}_3.$$

$$= \frac{\cancel{4}(2\pi)^2}{V_c^2}\begin{bmatrix} h^2(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3) + \\ k^2(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)\cdot(\vec{a}_3\times\vec{a}_1) + \\ l^2(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1\times\vec{a}_2) \end{bmatrix}$$

$$|\vec{G}| = \frac{2\pi}{V_c}\sqrt{[\;\cdots\;]}.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left[h^2\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 + k^2\,\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 + l^2\,\vec{a}_3\cdot\vec{a}_3\right]}.$$

$$|\vec{G}||\vec{v}| =$$

$$\frac{2\pi}{V_c}\sqrt{\begin{matrix} h^2(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3) + \\ k^2(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)\cdot(\vec{a}_3\times\vec{a}_1) + \\ l^2(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1\times\vec{a}_2) \end{matrix}}\sqrt{\begin{matrix} h^2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1) + \\ k^2(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2) + \\ l^2(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_3) \end{matrix}}.$$

$(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_1 = V_c$, So we write $\vec{a}_2\times\vec{a}_3 = \frac{V_c}{\vec{a}_1} = \vec{a}_1^{-1}V_c$.

$$(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3) = |\vec{a}_2\times\vec{a}_3|^2 = \left[\frac{|V_c|}{|a_1|}\right]^2.$$